Parcial de lógica

Lógica y computabilidad

Verano 2016

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja debe figurar nombre, apellido y número de orden. El examen consta de 4 ejercicios de igual valor. Cada ejercicio será calificado con A (aprobado), R (regular) o I (insuficiente), ocasionalmente con un signo - (menos). Para aprobar un parcial es necesario tener al menos dos ejercicios calificados con A o A-. Para promocionar es necesario tener al menos tres ejercicios calificados con A o A- en ambos parciales o sus correspondientes recuperatorios.

Ejercicio 1. Sea $\clubsuit$ un conectivo binario tal que para toda v valuación,

$$v \models \alpha\clubsuit\beta \iff ((v \models \alpha \text{ y } v \models \beta) \text{ o } (v \not\models \alpha \text{ y } v \not\models \beta))$$

Demostrar que el conjunto $\{\rightarrow, \clubsuit\}$ es adecuado.

Ejercicio 2. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar la respuesta.

a. Sean Γ y Γ' dos conjuntos consistentes de fórmulas de la lógica proposicional. Si $\Gamma \cap \Gamma'$ es maximal consistente entonces Γ y Γ' son iguales.

b. Sean Γ y Γ' dos conjuntos inconsistentes de fórmulas de la lógica proposicional. Entonces $\Gamma \cap \Gamma'$ no es maximal consistente.

Ejercicio 3. Decimos que un modelo de primer orden es *de equivalencia* si todas sus relaciones binarias son de equivalencia. Sea $\mathcal{L} = \{\mathcal{R}\}$, un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario $\mathcal{R}$ y sea SQ la axiomatización correcta y completa respecto a la clase de todos los modelos vista en clase.

a. Proponer una axiomatización SQ_{equiv} que extienda a SQ y que sea correcta y completa respecto a la clase de modelos que son de equivalencia. Justificar apropiadamente que la axiomatización propuesta cumple lo pedido.

b. Demostrar que la axiomatización dada en el ítem anterior es completa pero no es correcta respecto a la clase de todos los modelos.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{L} = \{=, \mathcal{R}\}$, un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de predicado binario $\mathcal{R}$. Decimos que una relación R tiene sus ciclos bajo control si para todo elemento x del dominio existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo ciclo con origen en x de la forma $R(x, y_1), R(y_1, y_2), ..., R(y_{n-1}, y_n), R(y_n, x)$ con $todosDistintos(x, y_1, ..., y_n)$, se tiene que $n \leq k$.

Demostrar que no es posible expresar en primer orden que una relación tiene sus ciclos bajo control.

Importante: Durante el parcial, se aclaró que el enunciado del ejercicio 1 tenía un error. La consigna debería ser: "Demostrar que el conjunto $\{\rightarrow, \clubsuit\}$ **no** es adecuado".

Ejercicios 1.

1	2	3	4	N
A	A+	A	A	P 10

¡Felicitaciones! !!

En primer lugar, voy a probar que para toda fórmula escrita con $\{\to, \phi\}$ y que posea una única variable proposicional, si llamamos φ a la fórmula y p a la variable, entonces $(\forall v \text{ valuación})\ v \models p \Rightarrow v \models \varphi$.

Lo haré por inducción en la complejidad de la fórmula:

C.B. $\varphi = p$. Trivialmente $v \models p \Rightarrow v \models \varphi$.

P.I. Supongamos $(\forall \varphi)$ si la complejidad de φ es $n \Rightarrow v \models p \Rightarrow v \models \varphi$ (para φ con una única variable proposicional p).
Entonces, si consideramos φ de complejidad $n+1$, con $Var(\varphi) = \{p\}$, hay dos casos:

a) $\varphi = \alpha \to \beta$, con α y β de complejidad n que cumplen $Var(\alpha) = Var(\beta) = \{p\}$. Luego $v \models p \Rightarrow v \models \beta$, por H.I. Por la semántica de la implicación, $v \models \varphi$.

b) $\varphi = \alpha \phi \beta$, con α y β de complejidad n que cumplen $Var(\alpha) = Var(\beta) = \{p\}$. Luego $v \models p \Rightarrow v \models \alpha$ y $v \models \beta$, por H.I. Por la semántica de ϕ, entonces, $v \models \varphi$.

Con esto demostrado, es sencillo ver que no puede haber una fórmula que represente a la función booleana $f: \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f(x) = 0\ (\forall x)$. En efecto, queríamos una fórmula con una variable prop., tal que $v \not\models \varphi\ (\forall v)$. Pero, si llamamos p a la variable de esta fórmula, entonces hay valuaciones que cumplen $v \models p$. En tal caso $v \models \varphi$, por el resultado ya

demostrado. Luego, no hay una fórmula construida con $\{\rightarrow, \phi\}$ que represente a esta función f. Luego $\{\rightarrow, \phi\}$ no es un conjunto adecuado.

Ejercicio 2

A

a. Verdadero. Demostración: La idea es probar que $\Gamma = \Gamma \cap \Gamma'$ y $\Gamma' = \Gamma \cap \Gamma'$. Así, queda probado que $\Gamma = \Gamma'$. Voy a exponer la demostración de que $\Gamma = \Gamma \cap \Gamma'$; el caso de $\Gamma' = \Gamma \cap \Gamma'$ es completamente análogo.

Sabemos que $\Gamma \cap \Gamma' \subseteq \Gamma$. Es decir, $\Gamma \cap \Gamma' = \Gamma \Leftrightarrow \Gamma \subseteq \Gamma \cap \Gamma'$. Veamos esto último.

Supongamos que $\Gamma \not\subseteq \Gamma \cap \Gamma'$. Es decir, $(\exists \alpha \in \Gamma)\ \alpha \notin \Gamma \cap \Gamma'$. Como $\Gamma \cap \Gamma'$ es máximal consistente, por la propiedad probada en el ejercicio (5)(b) de la práctica 5, debe pasar que $\neg\alpha \in \Gamma \cap \Gamma'$. Entonces $\neg\alpha \in \Gamma$. Como $\alpha \in \Gamma$ y $\neg\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$. Entonces Γ ~~[illegible]~~ es inconsistente. Absurdo, pues Γ es consistente por hipótesis. El absurdo vino de suponer que $\Gamma \not\subseteq \Gamma \cap \Gamma'$. Así que $\Gamma \subseteq \Gamma \cap \Gamma'$.

b. Falso. Demostración: Sea Δ un conjunto máximal consistente, y sean $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \neq \beta$. Resulta trivial que estas fórmulas deben existir, o Δ no sería m.c.(*) Consideremos ahora $\Gamma = \Delta \cup \{\neg\alpha\}$ y $\Gamma' = \Delta \cup \{\neg\beta\}$. Como $\alpha \in \Delta \Rightarrow \alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ y como $\neg\alpha \in \Gamma$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow \Gamma \vdash (\neg\alpha)$. Análogamente, $\Gamma' \vdash \beta$ y $\Gamma' \vdash (\neg\beta)$. Luego Γ y Γ' son conjuntos inconsistentes. No obstante, $\Gamma \cap \Gamma' = \Delta$ (notar que $\neg\alpha \notin \Gamma'$ y $\neg\beta \notin \Gamma$) que es máximal consistente. Luego, hallamos Γ y Γ' que no cumplen la propiedad enunciada.

$(*)$ Δ es m.c. $\Rightarrow$ Δ es infinito $\Rightarrow$ $(\exists \alpha, \beta \in \Delta)\ \alpha \neq \beta$.

Ejercicio 3

a. SQ_{equiv} contiene los 7 axiomas de SQ y estos tres axiomas adicionales:

$$SQ8 = (\forall x)\, \mathcal{R}(x,x)$$
$$SQ9 = (\forall x)(\forall y)\,(\mathcal{R}(x,y) \to \mathcal{R}(y,x))$$
$$SQ10 = (\forall x)(\forall y)(\forall z)\,((\mathcal{R}(x,y) \wedge \mathcal{R}(y,z)) \to \mathcal{R}(x,z))$$

Correctitud: Consideremos una fórmula demostrable a partir de SQ_{equiv}. Si podemos probar que, para cualquier modelo de equivalencia, todos los pasos de la demostración son válidos, habremos probado que la fórmula es válida. Ahora bien, los pasos de la demostración o bien son axiomas o bien son Modus Ponens de pasos anteriores. Lo segundo no nos preocupa pues MP preserva validez. En cuanto a los axiomas, los 7 de SQ son válidos en todo modelo (SQ es correcto con respecto a la clase de todos los modelos) y los 3 restantes expresan propiedades que $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$ debe cumplir para cualquier modelo $\mathcal{M}$ de equivalencia: reflexividad (SQ8), simetría (SQ9) y transitividad (SQ10).

Acabamos de deducir que toda fórmula demostrable desde SQ_{equiv} es válida en todo modelo de equivalencia. Luego SQ_{equiv} es un sistema correcto para esta clase de modelos.

Completitud: Queremos ver que si una fórmula es válida en todo modelo de equivalencia, se puede probar desde SQ_{equiv}. Supongamos que hay una fórmula φ que no cumple esto. Es decir, si $\mathcal{C}$ es la clase de los modelos de equivalencia,

$$(\forall \mathcal{M} \in \mathcal{C})\ \mathcal{M} \models \varphi \text{, pero } \nvdash_{SQ_{equiv}} \varphi. \qquad (1)$$

Ahora bien, decir que no hay demostración bajo el sistema SQ_{equiv} para φ equivale a decir que no hay ~~demostración~~ derivación (bajo el sistema SQ usual) para φ a partir de la teoría SQ_{equiv}. Por el Teorema de completitud fuerte (que afirma que $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$) podemos deducir que $SQ_{equiv} \nvdash \varphi \Rightarrow SQ_{equiv} \not\models \varphi$.

Es decir, existe algún modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models SQ_{equiv}$ pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$. Entonces, por (1), $\mathcal{M} \notin \mathcal{C}$.

Ahora bien, si $\mathcal{M} \models SQ_{equiv} \Rightarrow \mathcal{M} \models SQ8$, $\mathcal{M} \models SQ9$, y $\mathcal{M} \models SQ10$. Es decir, $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$ es simétrica, reflexiva y transitiva, por lo que es de equivalencia. Luego $\mathcal{M}$ es un modelo de equivalencia. Entonces $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$. Absurdo.

Luego, no puede haber fórmula válida en todo $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$ que no sea demostrable bajo el sistema SQ_{equiv}. Es decir, SQ_{equiv} es completo con respecto a $\mathcal{C}$.

Ejercicio 3 (cont.)

A b. Supongamos que φ es tal que para cualquier modelo $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi$. Entonces, como SQ es completo,(*) hay una demostración para φ desde SQ. Ahora bien, SQ $\subseteq$ SQ_{equiv}, por lo que esta misma demostración se puede construir desde SQ_{equiv}. Concluimos que SQ_{equiv} es completo con respecto a la clase de todos los modelos.

Si SQ_{equiv} fuera correcto con respecto a la clase de todos los modelos, para todo modelo $\mathcal{M}$ y fórmula φ, si hay una demostracción de φ desde SQ_{equiv} $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \varphi$. En particular todo modelo $\mathcal{M}$ valida todos los axiomas de SQ_{equiv}. Consideremos el modelo $\mathcal{N}$ de los naturales con la relación $\mathcal{R}$ interpretada como $\leq$. Debería pasar que este modelo valide SQ9. Es decir,

$$\mathcal{N} \models (\forall x)(\forall y)(\mathcal{R}(x,y) \to \mathcal{R}(y,x))$$

~~Consideremos la valuación~~

Tomemos una valuación v;

$$\mathcal{N} \models (\forall x)(\forall y)(\mathcal{R}(x,y) \to \mathcal{R}(y,x))[v] \Leftrightarrow$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N} \models (\mathcal{R}(x,y) \to \mathcal{R}(y,x))[v(x=n, y=m)] \Leftrightarrow$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{N} \not\models \mathcal{R}(x,y)[v(x=n, y=m)]$ o $\mathcal{N} \models \mathcal{R}(y,x)[v(x=n, y=m)] \Leftrightarrow$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ o $m \leq n$.

Si consideramos $n=0$, $m=1$, por ejemplo, vemos que esta propiedad no se cumple. Encontramos un modelo

que no valida uno de los axiomas de SQ_{equiv}, por lo que SQ_{equiv} no puede ser correcto con respecto a la clase de todos los modelos.

¡Muy bien!!

Ejercicio 4.

Lo demostraremos por absurdo. Supongamos que existe una fórmula ψ tal que $(\forall \mathcal{M}$ modelo$)$ $(\forall v$ valuación$)$

$\mathcal{M} \models \psi[v] \iff R^{\mathcal{M}}$ tiene sus ciclos bajo control.

Definimos una sucesión de fórmulas φ_n para $n \geq 1$ que expresan "no hay ningún ciclo de longitud n en $R^{\mathcal{M}}$". Formalmente:

$\varphi_1 = \neg(\exists y_1)(\text{todosDistintos}(x, y_1) \wedge R(x, y_1) \wedge R(y_1, x))$

$\varphi_2 = \neg(\exists y_1)(\exists y_2)(\text{todosDistintos}(x, y_1, y_2) \wedge R(x, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge R(y_2, x))$.

$\vdots$

$\varphi_n = \neg(\exists y_1)\cdots(\exists y_n)(\text{todosDistintos}(x, y_1, \ldots, y_n) \wedge R(x, y_1) \wedge R(y_1, y_2) \wedge \cdots \wedge R(y_{n-1}, y_n) \wedge R(y_n, x))$

Llamamos $\Gamma = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ y

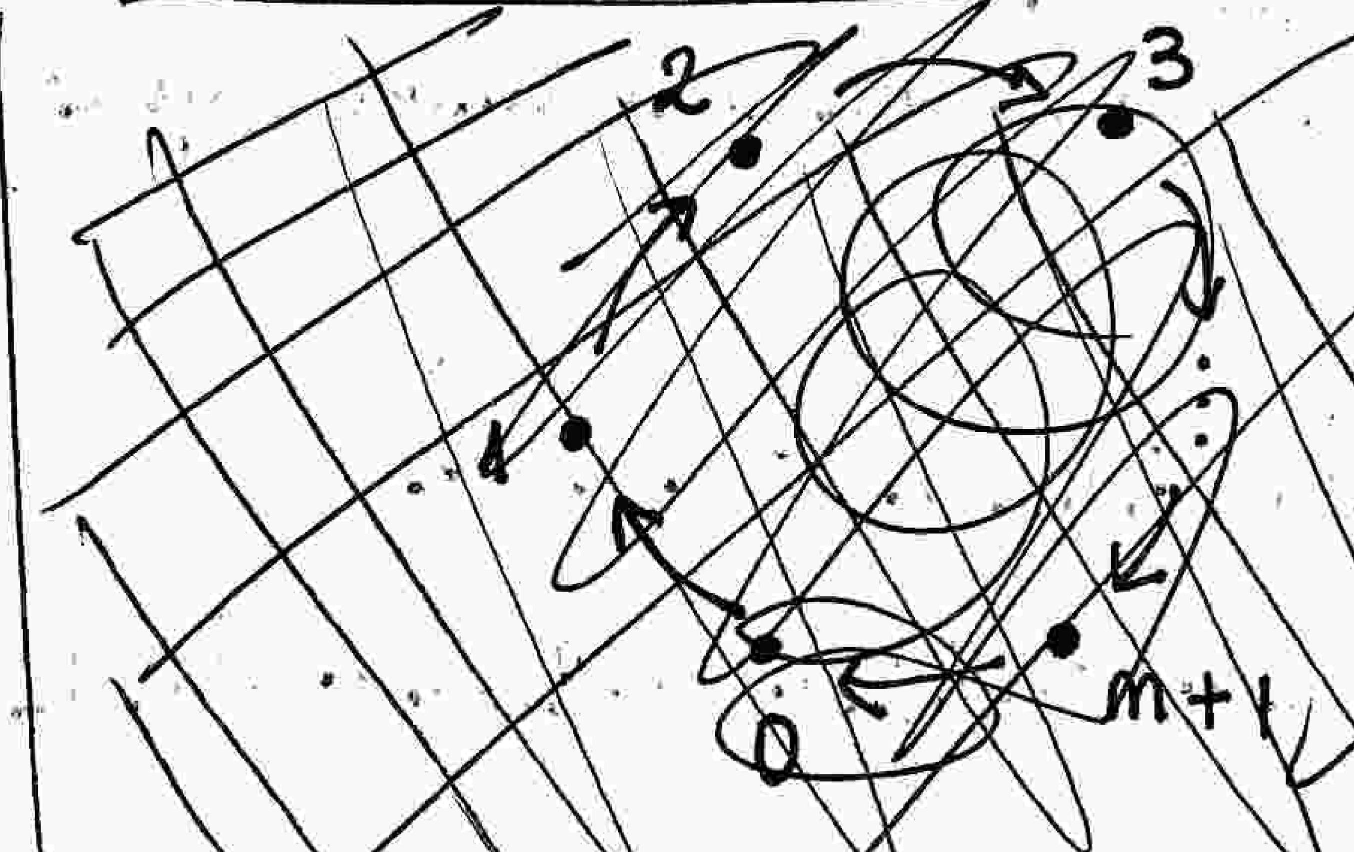
$\Delta = \Gamma \cup \{\neg\psi\}$.

Veamos que Δ no es satisfacible. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$. $(\forall j > k)\ \varphi_j \in \Delta$. Luego si $\mathcal{M}$ es modelo de Δ, $(\forall j > k)\ \mathcal{M} \models \varphi_j$. φ_j expresa que no hay ciclos de longitud j en $R^{\mathcal{M}}$.

Por otra parte, $\neg\psi \in \Delta \Rightarrow \mathcal{M} \models \neg\psi$. Lo que expresa $\neg\psi$ es, por hipótesis, que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe algún ciclo en $R^{\mathcal{M}}$ de longitud mayor que k. Sin embargo hallamos un valor de k tal que hay fórmulas, para todo $j > k$, que expresen que no hay ciclos de tal longitud. Como ningún modelo puede cumplir todo esto simultáneamente, Δ no puede ser satisfacible.

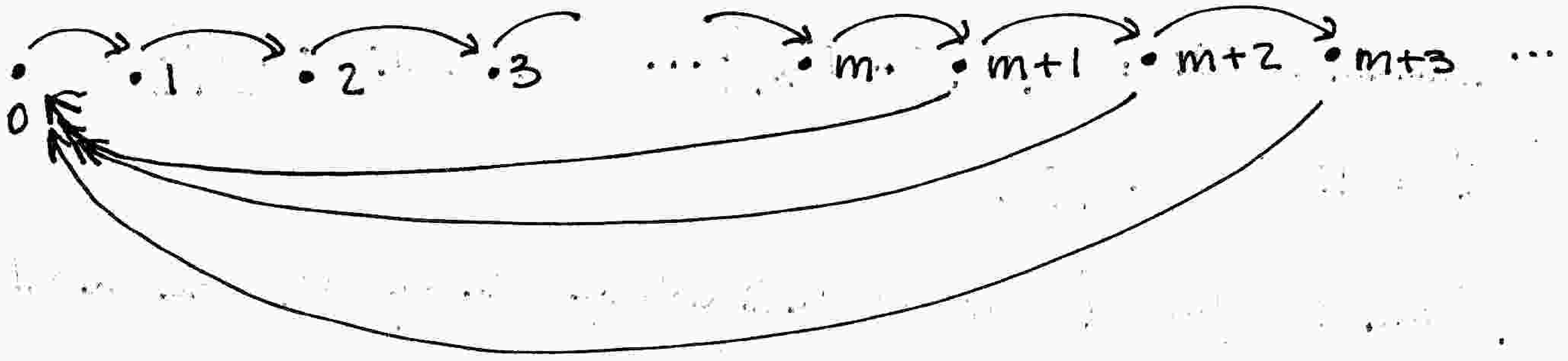
Ahora, aplicando compacidad, debe haber un subconjunto finito $\Delta_0 \subseteq \Delta$ insatisfacible.

Δ_0 contiene una cantidad finita de fórmulas φ_n.
Sea $m = máx(\{i \mid \varphi_i \in \Delta_0\} \cup \{1\})$. Consideremos también el modelo $\mathcal{M}$:



~~cuyo universo tiene m+2 elementos y la relación $R^{\mathcal{M}}$ (representada con las flechas) posee un ciclo de longitud m+1 (m+1 elementos intermedios).~~

~~No!~~



con universo infinito ~~[illegible]~~ numerable,
y la relación $R^{\mathcal{M}}$ definida como en el gráfico.
Es claro que $R^{\mathcal{M}}$ no tiene ciclos de longitud menor o igual que m. Luego $\mathcal{M} \models \varphi_i$ $(\forall i \leq m)$ y en particular $\mathcal{M} \models \varphi_i$ $(\forall i / \varphi_i \in \Delta_0)$. Sin embargo, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}$ contiene algún ciclo de longitud mayor que k.
Entonces $\mathcal{M} \models \neg\psi$. Esto quiere decir que, tanto si $\neg\psi \in \Delta_0$ como si no, $\mathcal{M} \models \Delta_0$. Pero Δ_0 era insatisfa-

Ejercicio 4 (cont.)

cible. Como llegamos a un absurdo, la suposición inicial de que la propiedad era expresable debe ser errónea. Es decir, la propiedad de que una relación tenga sus ciclos bajo control no es expresable en P.O.